Lösningar

1.

$$\begin{cases}\overline{v}_{m1i} = v\hat{x}; \overline{v}_{m1f} = 0 \\ \overline{v}_{m2i} = -v\hat{x}; \overline{v}_{m2f} = v'\hat{x}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\overline{p}_i = (m_1 v - m_2 v)\hat{x} \\ \overline{p}_f = m_2 v'\hat{x} \\ E_i = \dfrac{m_1 v^2}{2} + \dfrac{m_2 v^2}{2} \\ E_f = \dfrac{m_2 v'^2}{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\overline{p}_i = \overline{p}_f \Rightarrow m_1 v - m_2 v = m_2 v' \\ E_i = E_f \Rightarrow \dfrac{m_1 v^2}{2} + \dfrac{m_2 v^2}{2} = \dfrac{m_2 v'^2}{2}\end{cases} \text{; Sökt } \frac{m_1}{m_2}$$

$$\begin{cases}m_2(v' + v) = m_1 v \\ m_2(v'^2 - v^2) = m_2(v' + v)(v' - v) = m_1 v^2\end{cases} \Rightarrow m_1 v(v' - v) = m_1 v^2 \Rightarrow v' = 2v$$

$$\begin{cases}m_2(v' + v) = m_1 v \\ v' = 2v\end{cases} \Rightarrow m_2 \cdot 3v = m_1 v \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = 3$$

Svar: $\dfrac{m_1}{m_2} = 3$

2.

$$\begin{cases}\overline{p}_i = m\overline{v} \\ \overline{p}_f = m(\overline{v}_1 + \overline{v}_2) \\ E_i = \dfrac{mv^2}{2} \\ E_f = \dfrac{m(v_1^2 + v_2^2)}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\overline{p}_i = \overline{p}_f \Rightarrow m\overline{v} = m(\overline{v}_1 + \overline{v}_2) \Rightarrow \overline{v} = \overline{v}_1 + \overline{v}_2 \\ E_i + Q = E_f \Rightarrow \dfrac{mv^2}{2} + Q = \dfrac{m(v_1^2 + v_2^2)}{2}\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}\overline{v} = \overline{v}_1 + \overline{v}_2 \\ v^2 + \dfrac{2Q}{m} = v_1^2 + v_2^2\end{cases} \Rightarrow (\overline{v}_1 + \overline{v}_2) \cdot (\overline{v}_1 + \overline{v}_2) + \frac{2Q}{m} = v_1^2 + v_2^2 \Rightarrow \overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2 = -\frac{Q}{m}$$

$$\begin{cases}\text{Om } Q = 0 \Rightarrow \overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2 = |\overline{v}_1| \cdot |\overline{v}_2| \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{2} \\ \text{Om } Q < 0 \Rightarrow \cos\theta > 0 \Rightarrow \theta < \dfrac{\pi}{2} \\ \text{Om } Q > 0 \Rightarrow \cos\theta < 0 \Rightarrow \theta > \dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

---

3. När kulan fastnar i träblocket bevaras rörelsemängden $\Rightarrow m\overline{v}_0 = (M + m)\overline{v}_1(x = 0)$ $\Rightarrow \overline{v}_1(x = 0) = \dfrac{m}{M + m}\overline{v}_0$ där $\overline{v}_1$ är träblockets hastighet. Träblocket får då initialt den kinetiska energin $E_k(x = 0) = \dfrac{(M + m)\overline{v}_1^2(x = 0)}{2} = \dfrac{(M + m)m^2\overline{v}_0^2}{2(M + m)^2} = \dfrac{m^2\overline{v}_0^2}{2(M + m)}$

Friktionskraften $\bar{F}_f = -\mu_k (M+m) g\hat{x}$ är konstant och uträttar ett negativt arbete W då fjäderns trycks ihop från $x = 0$ till $x = x_{\max} = 0.20$ m .

$$W = \bar{F}_f \cdot \bar{s} = -\mu_k (M+m) g x_{\max}$$

Fjäderkraften $\bar{F} = -kx^2 \hat{x}$ N har en potentiell energi

$$E_p(x) = \int kx^2 dx = \frac{kx^3}{3};\ E_p(x=0) = 0 \Rightarrow E_p(x = x_{\max}) = \frac{kx_{\max}^3}{3}$$

Energikonservering $\Rightarrow E_k(x=0) + W = E_p(x = x_{\max})$

$$\Rightarrow \frac{m^2 \bar{v}_0^2}{2(M+m)} - \mu_k (M+m) g x_{\max} = \frac{kx_{\max}^3}{3}$$

$$\Rightarrow |\bar{v}_0| = \sqrt{\frac{2(M+m)}{m^2}\left(\frac{kx_{\max}^3}{3} + \mu_k (M+m) g x_{\max}\right)} \approx \frac{1}{m}\sqrt{2M\left(\frac{kx_{\max}^3}{3} + \mu_k M g x_{\max}\right)}$$

$$\Rightarrow \bar{v}_0 \approx 100\sqrt{2\cdot 3\left(\frac{1000\cdot 0.2^3}{3} + 0.3\cdot 3\cdot 9.82\cdot 0.2\right)}\hat{x} = 516\hat{x} \text{ m/s}$$

Svar: $\Rightarrow \bar{v}_0 = 516\hat{x}$ m/s

---

4. $$\bar{r}_{CM} = \frac{\int \bar{r} dm}{M} \text{ där } M = \int dm$$

Här $M = \int dm = \int_0^L \rho(x) dx = \int_0^L \rho_0 (1 + x/L) dx = \rho_0 \left[x + \frac{x^2}{2L} \right]_0^L = \frac{3}{2}\rho_0 L$

$$\bar{r}_{CM} = x_{CM}\hat{x} \Rightarrow x_{CM} = 1/M \int x dm = 1/M \int_0^L x\rho(x) dx = 1/M \int_0^L x\rho_0 \left(1 + \frac{x}{L}\right) dx \Rightarrow$$

$$x_{CM} = \frac{\rho_0}{M}\left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3L}\right]_0^L = \frac{\rho_0 L^2}{\frac{3}{2}\rho_0 L}\frac{5}{6} = \frac{5}{9}L$$

Svar: Stavens massa är $\frac{3}{2}\rho_0 L$ kg och dess masscentrum är $\frac{5}{9}L$ från ena ändpunkten

---

5. Stor cirkel utan hål: Massa $M_1 = \rho\pi a^2; \rho$ ytdensiteten, $x_{CM,1} = 0$

Liten cirkel: Massa $M_2 = \rho\pi c^2; x_{CM,2} = b$

Stor cirkel med hål: Massa $M_3 = \rho\pi(a^2 - c^2); x_{CM,3}$

$$x_{CM,1} = \frac{M_2 x_{CM,2} + M_3 x_{CM,3}}{M_1} \Rightarrow x_{CM,3} = -\frac{M_2}{M_3} x_{CM,2} = -\frac{\rho\pi c^2}{\rho\pi(a^2 - c^2)} b = -\frac{bc^2}{(a^2 - c^2)}$$

Pga symmetri blir $y_{CM,3} = 0$

Svar: Masscentrums läge $\bar{r}_{CM} = -\frac{bc^2}{(a^2 - c^2)}\hat{x}$

---

6. **a.** Kraftekvationen $\bar{F} = \dot{\bar{p}} \Rightarrow F_0\hat{x} = \dot{p}_x\hat{x} \Rightarrow p_x\hat{x} = (F_0 t + C)\hat{x}$

$\bar{v}(t=0) = 0 \Rightarrow \bar{p}(t=0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow p_x\hat{x} = F_0 t\hat{x}$

$\hat{x}$-led: $p_x = mv_x = F_0 t \Rightarrow v_x(t) = \dfrac{F_0 t}{m(t)}$

$$a_x(t) = \frac{d}{dt}v_x(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{F_0 t}{m(t)}\right) = \frac{F_0 m(t) - F_0 t\dfrac{dm}{dt}}{m^2(t)}$$

$$m(t) = m_0 - kt \Rightarrow a_x(t) = F_0\frac{m(t) - t\dfrac{dm}{dt}}{m^2(t)} = F_0\frac{m_0 - kt + tk}{m^2(t)} = \frac{F_0}{m_0}\frac{1}{(1-\dfrac{k}{m_0}t)^2}$$

b. Kraftekvationen $\bar{F} = \dot{\bar{p}}$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{F} = F(t)\hat{x} \\ m(t) = m_0 - kt \\ \bar{a} = a_0\hat{x} \end{array}\right\} \Rightarrow (\hat{x}-\text{led})\ F(t) = m\dot{v}_x + \dot{m}v_x = (m_0 - kt)a_0 - ka_0 t = a_0(m_0 - 2kt)$$

$$F(t=0) = F_1 = m_0 a_0 \Rightarrow a_0 = \frac{F_1}{m_0} \Rightarrow = F(t) = F_1(1 - \frac{2kt}{m_0})$$

Svar: **a.** $a_x(t) = \dfrac{F_0}{m_0}\dfrac{1}{(1-\dfrac{k}{m_0}t)^2}$

b. $F(t) = F_1(1 - \dfrac{2kt}{m_0})$

Lösningar

1. Raketekvationen: $\bar{F} = m\dfrac{d\bar{v}}{dt} - \bar{v}_e\dfrac{dm}{dt}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Tyngdkraft} = 0\\ \text{Luftmotstånd} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \bar{F} = 0;\ \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{a} = g\hat{z};\ \bar{v}_e = -\mu\hat{z}$$

$\hat{z}$-led: $0 = mg + \mu\dot{m} \Rightarrow m(t) = m_0 e^{-\frac{g}{\mu}t}$

Massflödet $q = |\dot{m}| = \dfrac{gm_0}{\mu}e^{-\frac{g}{\mu}t}$

Svar: Massflödet $q = \dfrac{gm_0}{\mu}e^{-\frac{g}{\mu}t}$

---

2. **a**. $\bar{F} = m\dfrac{d\bar{v}}{dt} - \bar{v}_e\dfrac{dm}{dt}$

$m(t=0) = m_0 = 100$ g; $m(t=t_1) = \dfrac{m_0}{2} = 50$ g där t_1 är tiden då bränslet tar slut.

$\dfrac{dm}{dt} = k = -10$ g/s $\Rightarrow t_1 = 5$ s och $m(t) = m_0 + kt$; $\bar{v}_e = v_e\hat{z} = -100\hat{z}$ m/s

$\bar{F} = F\hat{z} = -mg\hat{z}$

$\hat{z}$-led: $-mg = m\dot{v}_z - v_e\dfrac{dm}{dt} \Rightarrow \dfrac{dv_z}{dt} = -g + v_e\dfrac{\frac{dm}{dt}}{m} \Rightarrow v_z = -gt + v_e\ln m + C$

$v_z(t=0) = v_e\ln m_0 + C = 0 \Rightarrow C = -v_e\ln m_0 \Rightarrow v_z = -gt + v_e\ln\dfrac{m}{m_0}$

Raketen har högst fart precis då bränslet tagit slut

$v_z(t=t_1) = -gt_1 + v_e\ln\dfrac{m(t=t_1)}{m_0} = -10\cdot 5 - 100\ln\dfrac{1}{2} = 50(2\ln 2 - 1) \approx 19.3$ m/s

b. $\dfrac{dz}{dt} = v_z = -gt + v_e\ln\dfrac{m}{m_0} \Rightarrow z(t) = -\dfrac{gt^2}{2} + v_e\displaystyle\int\ln\frac{m}{m_0}dt = -\frac{gt^2}{2} + v_e\int\ln(1+\frac{k}{m_0}t)dt$

Variabelsubstitution och standardprimitivfunktion enligt Physics Handbook

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d}{dx}(x\ln x - x) = \ln x\\ x = 1 + \dfrac{k}{m_0}t\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{d}{dt}(x\ln x - x) = \frac{d}{dx}(x\ln x - x)\frac{dx}{dt} = \frac{k}{m_0}\ln x \Rightarrow$$

$$\ln(1+\frac{k}{m_0}t) = \frac{d}{dt}(\frac{m_0}{k}[(1+\frac{k}{m_0}t)\ln(1+\frac{k}{m_0}t) - (1+\frac{k}{m_0}t)]) \Rightarrow$$

$$\ln(1+\frac{k}{m_0}t) = \frac{d}{dt}[(\frac{m_0}{k}+t)\ln(1+\frac{k}{m_0}t) - t + D]$$

$$z(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_e \int \ln(1 + \frac{k}{m_0}t)dt = -\frac{gt^2}{2} + v_e[(\frac{m_0}{k} + t)\ln(1 + \frac{k}{m_0}t) - t + D]$$

$$z(t=0) = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow z(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_e[(\frac{m_0}{k} + t)\ln(1 + \frac{k}{m_0}t) - t]$$

Då bränslet precis tagit slut är $z(t = t_1) = -\frac{gt_1^2}{2} + v_e[(\frac{m_0}{k} + t_1)\ln(1 + \frac{k}{m_0}t_1) - t_1] \approx$

$$-\frac{10 \cdot 25}{2} - 100[(-\frac{100}{10} + 5)\ln(1 - \frac{10}{100}5) - 5] = -125 - 100[-5\ln(0.5) - 5] \approx 28 \text{ m}$$

Därefter fortsätter raketen ytterligare en sträcka s. Med energisamband får vi:

$$v_z^2(t = t_1) = 2gs \Rightarrow s = \frac{v_z^2(t = t_1)}{2g} \approx \frac{19.3^2}{2 \cdot 10} \approx 19 \text{ m}$$

Raketen når $28 + 19 = 47$ m

Svar: **a**. Maximala hastigheten är 19 m/s; **b**. Raketen når 47 m

---

3.

a. Bestäm båtens fart som funktion av sträcka:

$$a_0 = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds}v = a_0$$

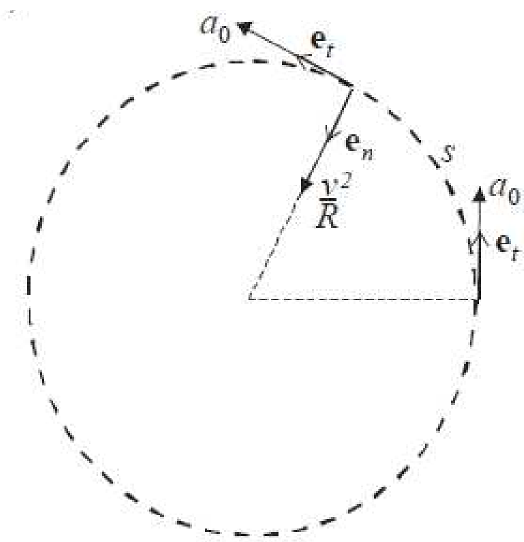
$$vdv = a_0 ds \Rightarrow \frac{v^2}{2} = a_0 s + C$$

Randvillkor:

$$\left\{\begin{matrix} s(t=0) = 0 \\ v(t=0) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow v^2 = 2a_0 s$$

Accelerationskomponenterna blir lika då:

$$a_n = a_t \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2}{R} = a_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2a_0 s}{R} = a_0 \quad =$$



b. $v^2 = 2a_0 s \Rightarrow v = \sqrt{a_0 R} \Rightarrow \{v = \omega R\} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{a_0}{R}}$

Svar: **a.** Accelerationskomponenterna blir lika då $s = \frac{R}{2}$;

b. Vinkelhastigheten är då $\omega = \sqrt{\frac{a_0}{R}}$

4. Om trumman har radien r är kedjans längd $l = 4 \times 2\pi r$.

När kedjan är helt avlindad är trummans vinkelhastighet ω (och hastigheten hos kedjan är $v=\omega r$).

I den ögonblick är den kinetiska energin för trumman

$$E_k^{trumman} = \frac{1}{2} I\omega^2 = \left\{ I = \frac{1}{2} Mr^2, \omega = \frac{v}{r} \right\} = \frac{1}{4} Mr^2 \frac{v^2}{r^2} = \frac{Mv^2}{4}$$

Och den kinetiska energin för kedjan är: $E_k^{kedjan} = \frac{1}{2} mv^2$

Eftersom trumman roteras utan friktion kan vi använda energiprincipen (dvs, den mekaniska energin bevaras)

$$E_k^i + E_p^i = E_k^f + E_p^f \Rightarrow \{ E_k^i = 0 \}$$

$$E_k^f = E_p^i - E_p^f \qquad (1)$$

När kedjan är helt avlindad har kedjans masscentrum ändrat sin höjd från H till ($H - \frac{1}{2} l$). Därför är ändringen i den potentiella energin:

$$E_p^i - E_p^f = mgH - mg(H - \frac{1}{2} l) = mg \frac{1}{2} l = 4\pi rmg$$

Ek. (1) kan nu skrivas som

$$E_k^{trumman} + E_k^{kedjan} = \frac{Mv^2}{4} + \frac{1}{2} mv^2 = 4\pi rmg$$

$$v = \sqrt{\frac{4\pi rmg}{\frac{M}{4} + \frac{1}{2} m}} = \sqrt{\frac{8\pi rg}{\frac{M}{2m} + 1}}$$

Svar: **a.** $v = \sqrt{\frac{8\pi rg}{\frac{M}{2m} + 1}}$ (Detta gäller för en solid cylinder, antagandet att det är en ihålig är också OK, men då får du $\frac{M}{m} + 1$ i nämnaren)

---

5. Alt 1: Physics Handbook 169

$$I = \frac{1}{3} m(\frac{L}{2})^2 + \frac{1}{12} M(\frac{L}{2})^2 + M(\frac{3L}{4})^2 = \frac{L^2}{12}[m + M(\frac{1}{4} + \frac{27}{4})] = \frac{(m + 7M)L^2}{12}$$

Alt 2: $I = \int x^2 dm = \int_o^{\frac{L}{2}} x^2 \frac{m}{L/2} dx + \int_{\frac{L}{2}}^{L} x^2 \frac{M}{L/2} dx = \frac{2m}{L} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{L}{2}} + \frac{2M}{L} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{\frac{L}{2}}^{L}$

$$I = \frac{mL^2}{12} + \frac{2ML^2}{3} \frac{7}{8} = \frac{(m + 7M)L^2}{12}$$

Svar: $I = \frac{(m + 7M)L^2}{12}$

---

6. För den mittersta disken är tröghetsmoment relativt en axel som går genom punkt O vinkelrätt mot diskplanet: $I = \frac{1}{2} mR^2$.

För diskarna bredvid mitten disken använder vi Steiners sats: $I = \frac{1}{2} mR^2 + mh^2$, där $h = 2R$.

På samma sätt för den tredje disken har vi: $I = \frac{1}{2} mR^2 + m(4R)^2$.

Så för systemet av fem diskar med en vid punkt O (dvs för OO⊕OO) kan vi skriva den totala tröghetsmoment som

$$I = \frac{1}{2} mR^2 + 2\left(\frac{1}{2} mR^2 + m(2R)^2\right) + 2\left(\frac{1}{2} mR^2 + m(4R)^2\right) = \frac{5}{2} (mR^2) + 2(m(2R)^2 + m(4R)^2).$$

Vi samma sätt kan vi fortsätta att skriva för tröghetsmomenten för ett system av 7, 9,11, 13 eller 15 diskar.
Den totala I för 15 diskar blir:

$$I = \frac{15}{2} (mR^2) + 2(m(2R)^2 + m(4R)^2 + m(6R)^2 + m(8R)^2 + m(10R)^2 + m(12R)^2 + m(14R)^2) =$$

$$= 1/2(15+4(2^2+4^2+6^2+8^2+10^2+12^2+14^2))mR^2 = \frac{2255}{2} mR^2.$$

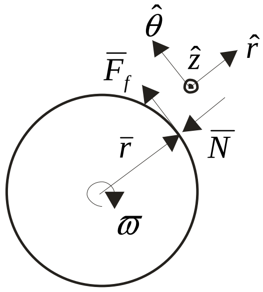
Från den totala massan och den totala längden får vi att $m = M/15$ och $R = L/30$.
Vi får:

$$I = \frac{2255}{2}\frac{M}{15}\frac{L^2}{30^2} = \frac{2255}{2}\frac{0.1}{15}\frac{1^2}{30^2} = 0.008352\, kg \cdot m^2 = 8.352 \cdot 10^{-3}\, kg \cdot m^2$$

Svar: $I = 8.352 \times 10^{-3}$ kgm^2

1. Friktionskraften mellan yxan och stenen ger ett bromsande vridmoment.
Rörelsekv.

$\bar{\tau} = I\bar{\alpha}$ (1)



$\bar{\tau} = \bar{r} \times \bar{F}_f = RF_f \hat{z}$ där $F_f = u_k N$, u_k =kinetisk friktionskoefficient; N=Normalkraft. (2)

massan M, radien R $\Rightarrow I = \frac{1}{2}MR^2$ (3)

Konstant kraft->α konstant under inbromsningen av slipstenen.

$\alpha = \omega_0 / t_{broms}$, (4) där ω_0 är vinkelhastigheten då inbromsningen börjar och t_{broms} är inbromsningstiden för slipstenen.

Ekv (1)-(4) ->

$$(\omega_0 / t_{broms}) \cdot \frac{1}{2}MR^2 = Ru_k N \rightarrow u_k = (\omega_0 / t_{broms}) \cdot \frac{MR}{2N} = \frac{2\pi \cdot 850 \cdot 50 \cdot 0.25}{60 \cdot 7.5 \cdot 2 \cdot 160} = 0.46$$

Svar (a) u_k =0.46

b. Det utförda arbetet av friktionskraften är förändringen i kinetisk energi:

$$W = \Delta E_k = 0 - \frac{1}{2}I\omega^2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}MR^2 \left(\frac{2\pi .850}{60}\right)^2 = -6.19 \text{ kJ}$$

Svar a. Friktionskoefficienten är 0.46 och det utförda arbetet
b. W =-6.19 kJ

---

2. **a.** I början är kulans translationsfart $v_i = 25.0$ m/s och den rullar.
Kinetiska energin är summan av translations - och rotationsbidrag, och är i början, $E_{k,i}$:

$$E_{k,i} = \frac{mv_i^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

där m är kulans massa, och I är kulans tröghetsmoment relativt en masscentrumsaxel:

$$I = \frac{2}{5}mR^2$$

Kulan rullar, därför gäller: $v_i = R\omega$

och kinetiska energin blir:

$$E_{k,i} = \frac{mv_i^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = (\frac{1}{2} + \frac{1}{5})mv_i^2 = \frac{7}{10}mv_i^2$$

Om kulan rullar uppför backen av höjden, h = 28,0 m, så ökar den potentiella energin från noll till $U_f = mgh$.
Den totala energin är bevarad:

$$E_{k,i} = E_{k,f} + U_f = \frac{mv_f^2}{2} + \frac{I\omega_f^{\ 2}}{2} + mgh$$
$$\frac{7mv_i^2}{10} = \frac{7mv_f^2}{10} + mgh$$
$$v_f = \sqrt{v_i^2 - \frac{10}{7}gh}$$

där v_f är kulans translationsfart på toppen.

Kulans rörelse kan nu beskrivas som fritt fall, med begynnelsevillkor:
$x_0 = 0, v_{x0} = v_f, a_x = 0, y_0 = h, v_{y0} = 0, a_y = -g$
För kastparabeln kan vi skriva:
$$x(t) = v_f t$$
$$y(t) = h - \frac{gt^2}{2}$$
Kulan når marken vid tidpunkten t_2 ($y(t_2)=0$):
$$t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$
Vid denna tidpunkt är kulans x-position:
$$x_2 = v_{x2}t = v_f t_2 = \sqrt{v_i^2 - \frac{10}{7}gh}\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2hv_i^2}{g} - \frac{20}{7}h^2} = \sqrt{\frac{2\cdot 28\cdot 25^2}{9.81} - \frac{20}{7}\cdot 28^2} = 36.4\,\text{m}$$

b. Kulans fart just i nedslagsögonblick är:

$$\vec{v}_2 = v_{x2}\hat{i} + v_{y2}\hat{j}$$
$$v_{x2} = v_f$$
$$v_{y2} = -gt_2 = -\sqrt{2gh}$$

$$|\vec{v}_2| = \sqrt{v^2{}_{x2} + v^2{}_{y2}} = \sqrt{v^2{}_f + v^2{}_{y2}} = \sqrt{v_i^2 - \frac{10}{7}gh + 2gh} = \sqrt{v_i^2 + \frac{4}{7}gh}$$
$$= \sqrt{25^2 + \frac{4}{7}9.81\cdot 28} = 28.0\ \text{m/s}$$

Svar: a. Kulan landar 36.4 m från stupets fot.
b. Farten är 28.0 m/s innan nedslaget.

---

3. Balanserande krafter i x-led:
$$F_N - T\sin\alpha = 0$$
$$F_N = T\sin\alpha$$
I y-led: $f + T\cos\alpha - Mg = 0 \quad (1)$

Balanserande vridmoment relativet klotens centrum:

$TR - fR = 0 \Rightarrow f = T$

(a) Från Ek (1)

$$f + f\cos\alpha - Mg = 0 \Rightarrow f = \frac{Mg}{1+\cos\alpha} = \frac{3\cdot 9.81}{1+\cos 50} = 17.9 \text{ N}$$

(b) Friktionskraften är åt andra sidan

$f = \mu F_N = \mu T\sin\alpha$

Så vi får

$$T = \mu T\sin\alpha \Rightarrow \mu \geq \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin 50} = 1.31$$

Svar: a. Friktionkraften är 17.9 N

b. Friktionkoefficienten μ≥1.31

---

4. Newton II i x-led ger:

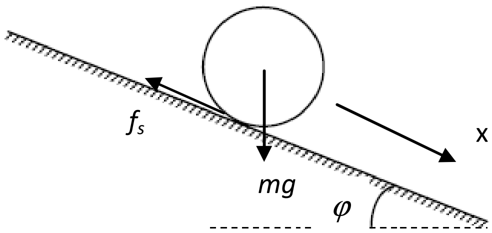
$$-ma_{com} = f_s - mg\sin\varphi$$

Newton II för rotation ger: $\tau = Rf_s = I_{com}\alpha$

$$a_{com} = R\alpha \to \alpha = \frac{a_{com}}{R}$$

$$Rf_s = I_{com}\frac{a_{com}}{R} \to f_s = I_{com}\frac{a_{com}}{R^2}$$

$$I_{com} = \frac{1}{2}mR^2$$



$$f_s = \frac{1}{2}mR^2\frac{a_{com}}{R^2} = \frac{1}{2}ma_{com}$$

$$-ma_{com} = \frac{1}{2}ma_{com} - mg\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad a_{com} = \frac{2g\sin\varphi}{3}$$

Svar: $a_{com} = \dfrac{2g\sin\varphi}{3}$

---

5. Jämvikt då $\begin{cases} \sum \overline{F}_i = 0 \\ \sum \overline{\tau}_i = 0 \end{cases}$

$\overline{N}_1 = N_1\hat{y};\ \ \overline{N}_2 = N_2\hat{x};\ \ \overline{R}_1 = -R_1\hat{x};\ \ \overline{F}_M = -Mg\hat{y};\ \ \overline{F}_m = -mg\hat{y};$

$\hat{x}$-led: $R_1 + N_2 = 0 \Rightarrow R_1 = -N_2$

$\hat{y}$-led: $N_1 - Mg - mg = 0 \Rightarrow N_1 = Mg + mg = 700 + 300 = 1000$ N

$\hat{z}$-led (vridmoment m a p punkten vägg/stege):

$$-Mg1\sin\alpha - mg\frac{l}{2}\sin\alpha + N_1 l\sin\alpha - R_1 l\cos\alpha = 0 \Rightarrow$$

$$R_1 = -Mg\frac{1}{l}\tan\alpha - mg\frac{1}{2}\tan\alpha + N_1\tan\alpha = \tan\alpha\left(-\frac{Mg}{l} - \frac{mg}{2} + Mg + mg\right) \Rightarrow$$

$$R_1 = \tan\alpha\left(\frac{3Mg}{4} + \frac{mg}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} 10\left(\frac{210}{4} + \frac{30}{2}\right) \Rightarrow 390 \text{ N}$$

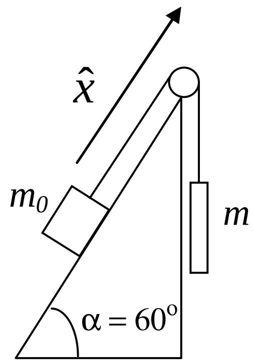
Svar: $\bar{N}_1 = 1000\hat{y}$ N ; $\bar{R}_1 = -390\hat{x}$ N

6.

$\bar{F}_{lina} = mg\hat{x}$

$\bar{F}_g = -m_0 g \sin\alpha\hat{x} - m_0 g \cos\alpha\hat{y}$

$\bar{F}_f = F_f\hat{x}$ där $|F_f| \le \mu m_0 g \cos\alpha$



$\hat{x}$-led: Jämvikt då $mg - m_0 g \sin\alpha + F_f = 0$

$F_f > 0$ då m "liten"; $F_f < 0$ då m "stor"

$$|F_f| = |-mg + m_0 g \sin\alpha| \le \mu m_0 g \cos\alpha$$
$$-\mu m_0 g \cos\alpha \le -mg + m_0 g \sin\alpha \le \mu m_0 g \cos\alpha$$
$$\mu m_0 \cos\alpha \ge m - m_0 \sin\alpha \ge -\mu m_0 \cos\alpha$$
$$m_0(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) \ge m \ge m_0(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$
$$m_0(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \le m \le m_0(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$$
$$m_0\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} - 0.6\cdot\tfrac{1}{2}\right) \le m \le m_0\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} + 0.6\cdot\tfrac{1}{2}\right) \Rightarrow 0.57m_0 \le m \le 1.17m_0$$

Svar: För jämvikt krävs $0.57m_0 \le m \le 1.17m_0$
